

## תרגילי בית 2. טורי פורייה

**הערות:** (i) כרגיל  $[a, b]$  ו  $(a, b)$  מסמנים קטע סגור ופתוח בהתאמה, אבל ביתר הנוסחאות בתרגילים האלו (כמו ברוב המסמכים המתמטיים) לסוגריים רבועיים "[...]" ולסוגריים רגילים "(...)" יש בדיוק אותו פרוש. (ii) כמובן אנו מצפים שתדעו גם **לנמק** כל תשובותיכם לשאלות כאן. (iii) מכון שתרגילים אלו מתפרסמים פחות משבוע לפני הבחן, לא נכלל שאלה ספציפית מכאן בבחן. (כמובן שאלה כזו כן יכולה להופיע בבחינה סופית). יחד עם זאת, השאלות 1, 2 (רק סעיף (א)), 4, 5, 6, 7, 8 (רק סעיף (א)), הן בנושאים של הבחן ולכן הן יכולות לעזור לכם ללמוד עוד משהו על החומר של הבחן.

$$1. \text{ הפונקציה } f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ נתונה ע"י } f(x) = \begin{cases} 0 & , x = \pi \\ x^3 & , -\pi < x \leq 0 \\ x+1 & , 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

קבעו האם כל אחד מהגבולות הבאים קיים, ואם הוא קיים מצאו את ערכו.

$$(א) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) dx \quad (ב) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - f(x)] \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \frac{dx}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$2. \text{ נניח ש } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ כאשר}$$

$$f(x) = 2 - 3 \sin x + 2 \cos x + |\sin x| \text{ לכל } x \in [-\pi, \pi]$$

$$(א) \text{ מצאו את } a_n \text{ לכל } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ ו } b_n \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$(ב) \text{ האם טור פורייה של } f \text{ מתכנס במידה שווה ב } [-\pi, \pi]$$

$$(ג) \text{ מצאו את כל הנקודות } x \text{ (אם יש) שבהן הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \text{ מתכנס.}$$

מצאו את הסכום של הטור הזה בכל הנקודות האלו.

$$(ד) \text{ מצאו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 - 4n^2}$$

$$3. (א) \text{ מצאו את טור הקוסינוסים וגם את טור הסינוסים של הפונקציה } f(x) = 1 + e^x \text{ בקטע } [0, \pi]$$

$$(ב) \text{ נניח שהטורים שמצאתם בחלק (א) הם } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ ו } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ בהתאמה.}$$

$$\text{מצאו את כל הנקודות } x \in \mathbb{R} \text{ (אם יש) שהבס הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ מתכנס.}$$

מצאו ערך הסכום של הטור הזה בכל אחת מהנקודות האלה.

$$4. \text{ חשבו את הגבול } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^2 e^x \sin nx dx \text{ אם הוא קיים.}$$

5. בעזרת טורי פורייה של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו  $g(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$  חשבו את הסכומים של הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  ו  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ .

---

6. מצאו את טור פורייה של הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} e^{ix/2} & , x \in [0, \pi] \\ -e^{ix/2} & , x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ .  
 הראו ששני הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$  ו  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{inx}$  מתבדרים כאשר  $x = 0$ . מדוע אין כאן סתירה עם משפט Dirichlet?

---

7. חשבו את סכום הטור  $\text{P.V.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 x^3 e^{-ix(n+1)} dx$ .  
 (נסביר את הפרוש של "P.V.", כלומר "principal value": לכל סדרה דו-צדדית  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  של מספרים קומפלקסיים, נגדיר  $\text{P.V.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \alpha_n$ . יש גם סימון דומה לאינטגרלים:  $\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ . דבר שעלול לגרום אי-הבנות ואי-דיוקים.)

---

8. נתונים שני קבועים שונים  $a$  ו  $b$  ב  $[-\pi, \pi]$ .  
 (א) מצאו את הערך של סכום הטור  $\text{P.V.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_a^b t^3 e^{t^3 + in(x-t)} dt \right]$  עבור כל ערך קבוע של  $x \in \mathbb{R}$  שבו הטור מתכנס.  
 (ב) מצאו תנאי מתאים על המספרים  $a$  ו  $b$  כך ש הטור הנ"ל מתכנס במידה שווה על  $[-\pi, \pi]$  אם ורק אם תנאי זה מתקיים.

---